Mathématiques

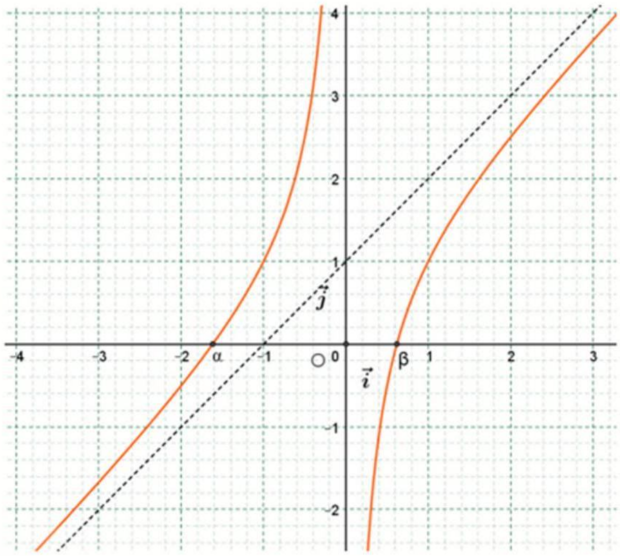
Bac Sc-Techniques

Magazine N°5 : Limite et continuité

TakiAcademy

تهنى على قرايتك

Exercice 1 25 min **5 pts**



Dans la figure ci-contre Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

- f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
- Coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses α et β.
- L'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}: y = x+1$ sont deux asymptotes à Γ.

1) En s'aidant du graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)+x^2)$

c) Etudier la limite de $\dfrac{f(\sin x)}{x}$ en 0.

2) Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = f\circ f(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{E}$ de φ.

b) Déterminer, en justifiant : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f\circ f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(f\circ f(x)-x)$.

c) En déduire la branche infinie à la courbe de φ au voisinage de $+\infty$.

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que **g** est définie sur $\mathbb{R}^*$.

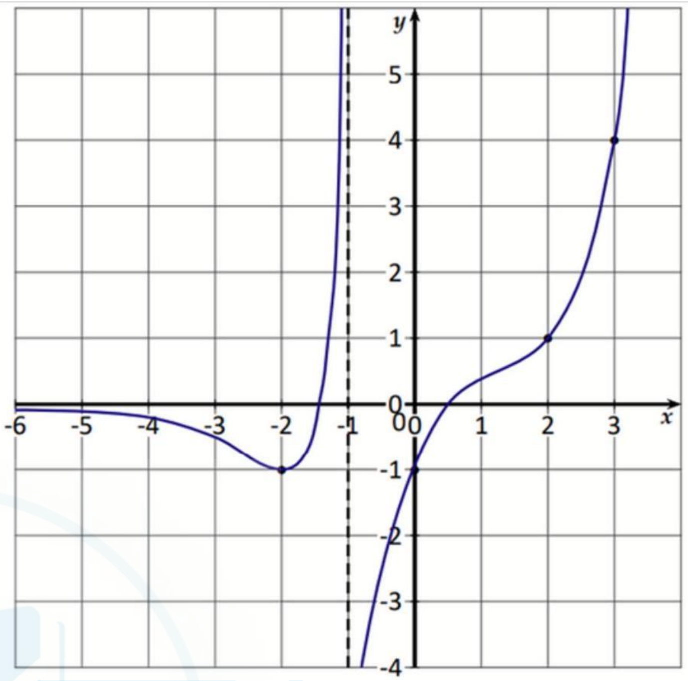
b) Calculer $g(-1)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

c) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$.

d) Déterminer alors g($]-\infty;-1]$)

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

On a représenté ci-contre la courbe C_g d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



- Les droites $\Delta : x=-1$ et $\Delta' : y=0$ sont des asymptotes à C_g.
- C_g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$

.I) Par lecture graphique :

1) Dresser le tableau de variations de g.

2) Déterminer $g\left(\left]-\infty;-2\right[\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{1-x}$.

II) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $h(x)=\dfrac{2x+1}{1-x}$ et $f=g\circ h$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$

2) a) Étudier le sens de variation de h sur $I=\left]1,+\infty\right[$ et déterminer $h(I)$.

b) Déduire le sens de variation de f sur I.

c) Montrer que f est continue sur $I=\left]1,+\infty\right[$.

d) Déterminer $f(I)$.

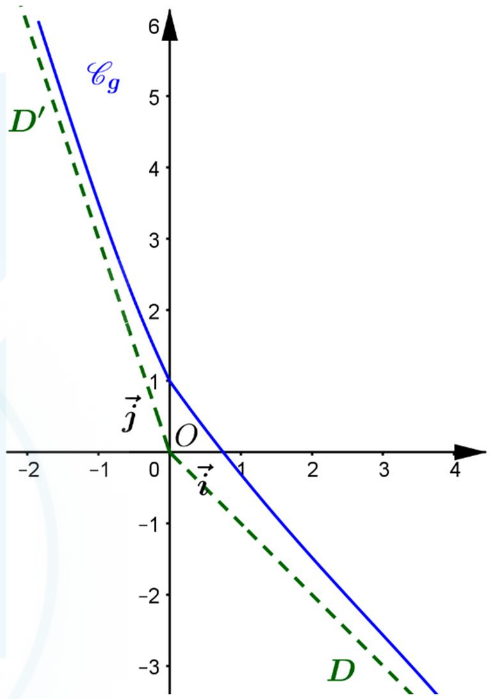
Exercice 3 — 25 min — 5 pts

1°) On pose $f(x)=1+x^3+x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $x\in\left]-\infty;0\right[$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$: $1+x+x^3\le f(x)\le 1-x+x^3$.

2°) Le graphique ci-contre représente une fonction g définie sur IR admettant deux asymptotes $D: y=-x$ et $D': y=-3x$.



a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ g(x)-g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)$.

b) Déterminer $g\left(\left[0,+\infty\right[\right)$

3°) Soit la fonction h définie sur IR par :

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x<0 \\ g(x) & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

a) Montrer que h est continue en 0.

b) Montrer que l'équation : $h(x)=-\frac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]-\frac{3}{2};-1\right[$.

c) Vérifier que : $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\left(2\alpha^2+\frac{3}{\alpha}\right)$.

Exercice 4 25 min **5 pts**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+1-\sqrt{x^2+2x} & \text{si } x\geq 0 \\ 1+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

2) a) Prouver que pour tout réel $x<0$, on a : $1-x^2\leq f(x)\leq 1+x^2$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$, admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et vérifier que $\alpha\in\,]1,2[$.

b) Montrer que α est le seul réel positif vérifiant : $\alpha^2=\dfrac{1}{2(\alpha-1)}$.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\sin x}-1\right) & \text{si } \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Montrer que l'équation $h(x)=\dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 5 25 min **5 pts**

La courbe (C_f) de la figure (1) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

On sait que :

- (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une direction asymptotique celle de la droite dont une équation $y = 2x$,
- La droite des ordonnées est une asymptote à (C_f).
- (C_f) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de la droite des ordonnées,
- (C_f) rencontre l'axe des abscisses en exactement trois points d'abscisses respectives $-1, \alpha$ et β ,
- La courbe (C_g) de la restriction g de f sur $]-\infty,0[$ rencontre la droite Δ d'équation $y = x$ est un unique point d'abscisse strictement négative x_0.
- f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

A/ 1) a) Par lecture graphique donner : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\circ f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\circ f(x)-2f(x)\right)$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[\beta;\alpha]$.

B / 1) On considère la fonction $\varphi : x \mapsto g\circ g(x)$ et on désigne par (C_φ) sa courbe représentative.

a) Justifier que l'ensemble de définition de φ est l'intervalle $]-\infty,-1[$.

b) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et à gauche en -1.

c) Etudier la nature des branches infinies de (C_φ).

2) a) Montrer que φ est strictement croissante sur $\left]-\infty;-1\right[$.

b) Etudier l'intersection des deux courbes $\left(C_g\right)$ et $\left(C_\varphi\right)$ puis étudier leurs positions relatives.

3) Sur la figure (2), on donne la $\left(C_g\right)$ et la droite Δ.

a) Construire le point A d'intersection de $\left(C_\varphi\right)$ et l'axe des abscisses et le point B de $\left(C_\varphi\right)$ d'abscisse x_0.

b) Tracer l'allure de $\left(C_\varphi\right)$.

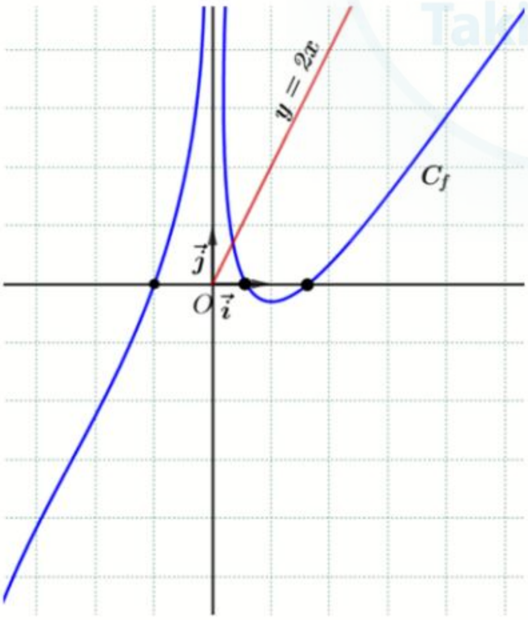


Figure 1

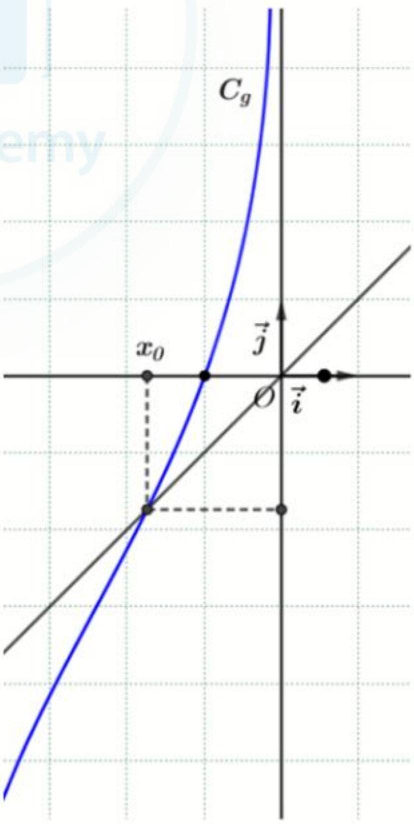


Figure 2

Nos Locaux

- Sahloul
- Khezama
- Msaken
- Monastir
- Mahdia
- Kasserine
- CUN
- Ksar Hellal
- Ezzahra
- Tataouine
- El Aouina
- El Mourouj
- Bardo
- Bizerte
- Nabeul
- Kelibia
- Gafsa
- Tozeur
- kébili
- Gabes
- Siliana
- Sfax
- Béja
- Le Kef
- Zaghouan
- Kairouane
- Jendouba
- Sidi Bouzid
- Medenine
- Djerba